Komplexní čísla 3: Jednoduché rovnice v $\mathbb{C}$, geometrická interpretace $\mathbb{C}$ a goniometrický tvar komplexních čísel

Z minula si připomeňme, že každé komplexní z číslo má svůj algebraický tvar

$$\boxed{z = \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{i}}$$

To samé číslo můžeme zapsat i pomocí jeho goniometrického tvaru

$$\boxed{z = ||z|| \left(\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha\right)}$$

Přičemž absolutní hodnota $||z||$, argument α a reálná část $\mathbf{Re}\,(z)$, resp. imaginární část $\mathbf{Im}\,(z)$ jsou spolu propojeny vztahy

$$\boxed{\begin{aligned} ||z|| &= \sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2} \\ \sin\alpha &= \frac{\mathbf{b}}{||z||} \\ \cos\alpha &= \frac{\mathbf{a}}{||z||} \end{aligned}}$$

Goniometrický tvar a násobení v $\mathbb{C}$ Kde je ta slibovaná výhoda goniometrického tvaru? Vezměme si pro ukázku čísla $z_1 = -\sqrt{3} + i$ a $z_2 = 2 + 2\sqrt{3}i$ a podívejme se na jejich součin: samozřejmě umíme snadno spočítat, že $z_3 = z_1 \cdot z_2 = -4\sqrt{3} - 4i$. Co zjistíme při pohledu na goniometrické tvary zúčastněných čísel?

$$z_1 = -\sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right)$$

$$z_2 = 2 + 2\sqrt{3}i = 4\left(\cos\frac{1}{3}\pi + i\sin\frac{1}{3}\pi\right)$$

$$z_3 = -4\sqrt{3} - 4i = 8\left(\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi\right)$$

Když se podíváme pořádně, uvidíme, že

- absolutní hodnota z_3 je *součinem* absolutních hodnot čísel z_1 a z_2, totiž $8 = 2 \cdot 4$
- argument čísla z_3 je *součtem* argumentů čísel z_1 a z_2, tedy $\frac{7}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi + \frac{1}{3}\pi$.

To samozřejmě není náhoda, tento princip (zvaný **Moivreova věta**) platí obecně:

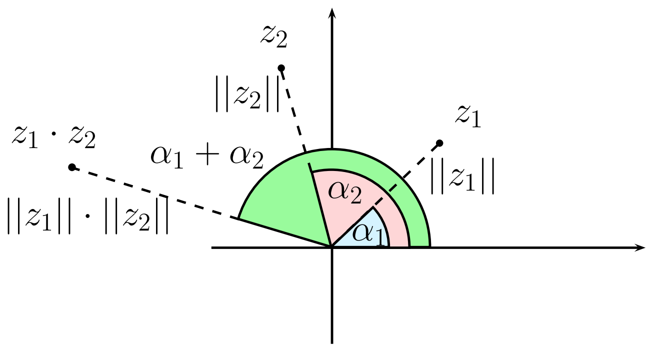
Pro komplexní čísla

$$z_1 = ||z_1|| \left(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1\right)$$
$$z_2 = ||z_2|| \left(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2\right)$$

platí

$$z_1 \cdot z_2 = ||z_1|| \cdot ||z_2|| \left(\cos\left(\alpha_1 + \alpha_2\right) + i\sin\left(\alpha_1 + \alpha_2\right)\right)$$

Grafická představa Moivreovy věty by mohla vypadat třeba takto:



Příklad 1. *Určete, kolik je* $(1+i)^{24}$.

Řešení. Možností, jak zjistit výsledek, je mnoho - pomocí klasického násobení (bez přemýšlení 23 násobení, s trochou invence 5 násobení), pomocí binomické věty ap. Využijeme ale nyní Moivreovu větu: zjistíme si, že goniometrický tvar čísla $1+i$ je $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Platí tedy například $(1+i)^2 = (1+i)\cdot(1+i) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \overset{\text{Moivreova věta}}{=} \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$, což je po převedení zpět do algebraického tvaru rovno $2i$; podobně bude vš fungovat i pro $(1+i)^3$ atd.

Dostaneme tedy $(1+i)^{24} = \sqrt{2}^{24}\left(\cos 24\frac{\pi}{4} + i\sin 24\frac{\pi}{4}\right) = 2^{12}\left(\cos 6\pi + i\sin 6\pi\right) = 2^{12}(1+0i) = 2^{12}$. □

Příklad 2. *Určete goniometrický tvar čísla* $2\left(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi\right)\cdot\frac{1}{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$. *Určete i algebraický tvar tohoto čísla.* [$\frac{2}{3}\left(\cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{11}{6}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{3}i$]

Příklad 3. *Kolik je* $\left(\cos\frac{\pi}{18} + i\sin\frac{\pi}{18}\right)^6$*?* [$\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$]

Příklad 4. *Kolik je* $\left(1-\sqrt{3}i\right)^5$*?* [$16 + 16\sqrt{3}i$]

Moivreova věta má nutně i svůj tvar pro dělení:

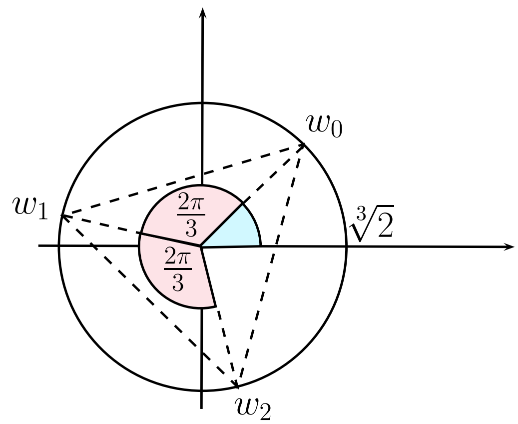
> Pro komplexní čísla
> $$z_1 = ||z_1||\left(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1\right)$$
> $$z_2 = ||z_2||\left(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2\right)$$
> platí
> $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{||z_1||}{||z_2||}\left(\cos\left(\alpha_1-\alpha_2\right) + i\sin\left(\alpha_1-\alpha_2\right)\right)$$

Příklad 5. *Určete pomocí Moivreovy věty podíl čísel* $z_1 = -\sqrt{3}+i$ *a* $z_2 = 2+2\sqrt{3}i$.
[goniometrické tvary obou čísel už máme spočítané výše; $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$]

Odmocniny v $\mathbb{C}$ Možnost spočítat libovolnou odmocninu z libovolného komplexního (tedy i reálného) čísla je tou zásadní vlastností, která z komplexních čísel dělá tak důležitý matematický objekt. Jak se tedy počítá?

Podívejme se nejprve na příklad: chceme například spočítat třetí odmocninu z čísla $-1+i$.

1. nejprve převedeme číslo $\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ na goniometrický tvar; ten je $2\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$
2. důležitým faktem č. 1 je, že třetí „odmocniny“ existují tři! První z nich spočítáme jednoduše: odmocníme absolutní hodnotu a úhel vydělíme třemi: $w_0 = \sqrt[3]{2}\left(\frac{1}{4}\pi + i\sin\frac{1}{4}\pi\right)$
3. důležitým faktem č. 2 je, že všechny tři odmocniny spolu tvoří pravidelný trojúhelník, proto mezi sebou musejí svírat úhel $\frac{2\pi}{3}$. Na obrázku takto:



4. abychom našli zbylé dvě odmocniny, stačí tedy vzít w_0, ponechat její absolutní hodnotu a postupně přičítat v argumentu úhel $\frac{2\pi}{3}$; dostaneme tak $w_1 = \sqrt[3]{2}\left(\frac{11}{12}\pi + i\sin\frac{11}{12}\pi\right)$ a $w_2 = \sqrt[3]{2}\left(\frac{19}{12}\pi + i\sin\frac{19}{12}\pi\right)$

Příklad 6. *Přesvědčte se (umocněním), že* $(w_0)^3 = (w_1)^3 = (w_2)^3 = -\sqrt{3} + i$ *a jsou to tedy opravdu třetí odmocniny z* $-\sqrt{3} + i$.

Tento postup funguje vždy, s tou obměnou, že n-tých odmocnin je vždy n a tvoří pravidelný n-úhelník, proto přičítáme úhel $\frac{2\pi}{n}$.

Příklad 7. *Najděte všechny třetí odmocniny z čísla* 4.
$[w_0 = \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{4}\,(\cos 0 + i\sin 0),\ w_1 = \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right),\ w_2 = \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)\ ]$

Příklad 8. *Najděte všechny čtvrté odmocniny z čísla* $1 - i$.
$[w_0 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{7}{16}\pi + i\sin\frac{7}{16}\pi\right), w_1 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{15}{16}\pi + i\sin\frac{15}{16}\pi\right),\ w_2 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{23}{16}\pi + i\sin\frac{23}{16}\pi\right),$
$w_3 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{31}{16}\pi + i\sin\frac{31}{16}\pi\right)\ ]$

Kvadratické rovnice v $\mathbb{C}$ Nyní, když umíme udělat (nejen) druhou odmocninu z libovolného komplexního čísla, umíme vyřešit i kvadratické rovnice, které dosud v $\mathbb{R}$ řešení neměly: příkladem může být třeba rovnice $x^2 + x + 1 = 0$, která má záporný diskriminant. V komplexních číslech však už ani to není problém.

Příklad 9. *Vyřešte pro* $x \in \mathbb{C}$ *rovnici* $x^2 + x + 1 = 0$.

Řešení. Podle vzorce máme $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$. Hledáme tedy druhou odmocninu z -3. V $\mathbb{C}$ si ale z -3 umíme najít obě druhé odmocniny: po chvíli práce dostaneme $3i$ a $-3i$, která můžeme dosadit do vzorce a získáme řešení $x_{1,2} = \frac{-1\pm(\pm 3i)}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}i$.

V příkladech tohoto typu se dá postup zrychlit: $-3i = 3i^2$, takže $\sqrt{-3} = \sqrt{3i^2} = \sqrt{3}\sqrt{i^2} = \sqrt{3}i$ (poslední rovnost je sice matematický faul, ale v tomto případě výsledek neovlivní). $\square$

(Pokud byste se chtěli zase podívat na nějaká videa k tématu, tak solidní opět kanál *isibalo*: `https://www.youtube.com/playlist?list=PLD-MTmOzXT5OxEfOyFqHm8vjtYY44BUh7` (pro nás jsou teď zajímavá videa č. 16 až 22.)

A nyní trochu praxe:

1.

   (a) Najděte všechny čtvrté komplexní odmocniny z čísla i. [$w_0 = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}; w_1 = \cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8}; w_0 = \cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}; w_0 = \cos\frac{13\pi}{8} + i\sin\frac{13\pi}{8}$]

   (b) Vyřešte následující rovnice s neznámou v $\mathbb{C}$:

      i. $5x^2 - 2x + 1 = 0$ [$\frac{1}{5} \pm \frac{2}{5}i$]

      ii. $3x^2 - 2x + 1 = 0$ [$\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{3}i$]

      iii. $x^2 - 4ix - 8 = 0$ [nelekněte se koeficientu $-4i$, vzorec pro řešení kvadratické rovnice platí i $\mathbb{C}$; $\pm 2 + 2i$]

      iv. $x(3 - x) = 3 - i$ [$2 + i, 1 - i$; při hledání odmocniny z diskriminantu $-3 + 4i$ můžete buď počítat, jak jsme se to naučili, nebo (speciálně pro druhé odmocniny) i takto $\sqrt{-3+4i} = a + bi \Rightarrow -3 + 4i = (a + bi)^2$ a nyní porovnat reálné a imaginární části na obou stranách]